METRICA
METRology Institutional CAtalog

ISTITUTO NAZIONALE DI RICERCA METROLOGICA
Repository Istituzionale

Rettilineità: proprietà ed approfondimenti

Original
Rettilineità: proprietà ed approfondimenti / Balsamo, Alessandro. - (2016).

Availability:
This version is available at: 11696/54786 since: 2017-03-02T17:18:24Z

Publisher:

Published
DOI:

Terms of use:

This article is made available under terms and conditions as specified in the corresponding bibliographic description in the repository

Publisher copyright

(Article begins on next page)

15 January 2025

Rettilineità: proprietà ed approfondimenti

Alessandro Balsamo

Rapporto Tecnico INRIM 8/2016
Settembre 2016

Sommario

Questo Rapporto Tecnico illustra le proprietà matematiche dei principali operatori (definizioni) di rettilineità in uso nella pratica, ciascuno in base ad una specifica retta di riferimento. Non s'affrontano invece gli aspetti più propriamente di misura, anche se lo sfruttamento delle proprietà descritte può guidare nella progettazione di piani di misura più insensibili agli errori e più efficienti operativamente.

Dopo un breve richiamo dei principali termini e simboli definiti nelle norme tecniche in vigore, si caratterizza formalmente l'operatore di rettilineità rispetto a diverse rette di riferimento. Si generalizza quindi un sottoinsieme di questi mediante un unico operatore lineare declinabile nei casi d'interesse, di cui vengono illustrate le proprietà.

Indice

Sommario 2
1 Introduzione 3
2 La rettilineità 4
2.1 Rette di riferimento più usate nella pratica 4
2.1.1 Retta ai minimi quadrati (LS) 5
2.1.2 La retta a zona minima (MZ) 6
2.1.3 La retta passante per due punti predefiniti 7
2.2 Retta di riferimento ottenuta mediante operatore lineare 8
2.2.1 Applicazione alle rette di riferimento più usate nella pratica 9
2.3 Linearità 10
2.4 Invarianza per rototraslazione nel piano di rettilineità 11
3 Conclusioni 14
4 Riferimenti 16

1 Introduzione

La rettilineità è la caratteristica geometrica che esprime il grado d'assenza di curvatura di un profilo. Ciò è d'interesse pratico in numerose circostanze, ad esempio quando sia coinvolto uno scivolamento o un rotolamento.

In natura non esistono profili, ma solo superfici: lo spazio è tridimensionale, e le interfacce tra sue porzioni (ad esempio la separazione fra un corpo e l'ambiente circostante) sono bidimensionali (superfici) e non monodimensionali (curve o profili). I profili si formano intersecando due superfici fra loro. Di particolare interesse è il caso di una superficie reale e una teorica: il profilo è allora la sezione della superficie reale secondo una superficie teorica predefinita.

La rettilineità nasce dall'intersezione di una superficie reale con un piano. Dunque, essa è una caratteristica orientata nello spazio, perché il profilo giace in quel piano e ne mutua l'orientamento. Ciò può non risultare evidente quando si consideri il profilo esclusivamente *nel suo* piano, come avviene tracciando una curva su un foglio: il problema tridimensionale (nello spazio) si riduce ad uno bidimensionale (nel piano) e perde l'orientamento, già espresso dal piano del foglio.

La caratteristica geometrica che esprime il grado d'assenza di curvatura di superfici reali in modo più naturale è la *planarità*; possiamo concepire la rettilineità come una sua riduzione al caso bidimensionale lungo una direzione[1]. La rettilineità è preferibile alla planarità quando esista nella geometria o nell'applicazione una direzione prevalente o d'interesse. Ad esempio:

- In una superficie rettangolare con elevato fattore di forma (un lato del rettangolo molto più corto del successivo) prevale la direzione del lato lungo, e spesso si è interessati alla rettilineità in tale direzione molto più che in quella ortogonale. Si pensi al caso di un campione di rettilineità, che potrebbe essere infinitamente sottile e il cui spessore non nullo ha sviluppo di scarso interesse.
- Per garantire il corretto rotolamento di un rullo su una corsia nominalmente piana, si è interessati all'assenza di curvatura della corsia in tutte le direzioni; parrebbe dunque la planarità la caratteristica di maggior interesse. Tuttavia le rettilineità nelle due direzioni, parallela e ortogonale all'asse di rotolamento, caratterizzano comportamenti funzionali assai diversi: la prima la luce nel contatto fra corsia e rullo (e quindi, ad esempio, la tenuta idraulica e il profilo di pressione di contatto), la seconda l'assenza di movimenti parassiti nel rotolamento (e quindi il movimento dolce). Può essere d'interesse dunque separare le due direzioni, e caratterizzazione la corsia con due rettilineità invece che con la planarità.

Per la sua importanza pratica, la rettilineità è una delle caratteristiche geometriche riconosciute nel sistema normalizzato di tolleranze dimensionali e geometriche dei prodotti (GPS – *Geometrical Product Specification*).

[1] In realtà, lungo due direzioni, quelle che determinano l'orientamento del piano secante. Tuttavia, una delle due direzione è usualmente assunta ortogonale (localmente) alla superficie, ed è predeterminata. Piccole variazioni intorno a tale direzione portano ad errori del coseno e sono normalmente ininfluenti (del second'ordine) perché l'ampiezza dei profili di rettilineità è di solito molto piccola (ordine dei micrometri o meno).

2 La rettilineità

La rettilineità è completamente definita dalle norme tecniche [1],[2].

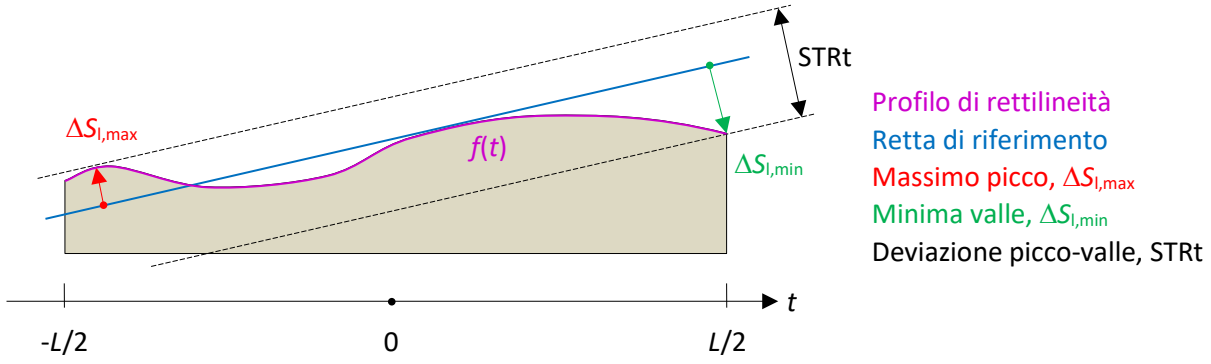
L'intersezione di una superficie con un *piano di rettilineità*, tipicamente ortogonale alla superficie, è detta *profilo di rettilineità*.

Ad esso è associata una retta rappresentativa giacente nel piano di rettilineità, detta *retta di riferimento*, che costituisce il profilo ideale.

La distanza di ciascun punto del profilo di rettilineità dalla retta di riferimento è detta *deviazione locale di rettilineità* (LSD), ΔS_l; essa è una funzione della variabile corrente del profilo.

Per rappresentare il profilo di rettilineità sinteticamente con un unico valore, è definita la *deviazione picco-valle di rettilineità* (STRt), cioè il campo di variabilità delle deviazioni locali di rettilineità, $\Delta S_{l,max}$ - $\Delta S_{l,min}$ (vedi Figura 1).

Figura 1.
Schema d'interpretazione della rettilineità. La scelta della retta di riferimento in figura è arbitraria.



Interessa qui notare che i valori delle deviazioni locali di rettilineità sono presi per riferimento alla retta di riferimento, la cui scelta è convenzionale: al variare di questa cambiano i valori delle deviazioni locali di rettilineità.

2.1 Rette di riferimento più usate nella pratica

Nel seguito si trattano le rette di riferimento più comuni; tutte abbiano generica equazione $y = a + bt$ nel piano di rettilineità, dove t è la variabile corrente del profilo.

A stretto rigore, le deviazioni locali di rettilineità sono prese nella direzione ortogonale alla retta di riferimento, cioè nella direzione del versore

$$\boldsymbol{n} = \frac{1}{\sqrt{b^2+1}}\begin{pmatrix} -b \\ 1 \end{pmatrix} \tag{1}$$

Se però il profilo di rettilineità $f(t)$ è pre-allineato in modo da risultare (quasi) orizzontale, allora $|b| \ll 1$, e il versore $\boldsymbol{n}$ risulta prossimo alla verticale.

Nel seguito supporremo che il profilo di rettilineità sia pre-allineato, e confonderemo l'ortogonale alla retta di riferimento con la verticale:

$$\Delta S_{\mathrm{l}} = f(t) - a - bt \tag{2}$$

2.1.1 Retta ai minimi quadrati (LS)

Essa minimizza la somma integrale dei quadrati delle deviazioni locali di rettilineità:

$$\min_{a,b} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \Delta S_{\mathrm{l}}^2 \mathrm{d}t = \min_{a,b} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} [f(t) - a - bt]^2 \mathrm{d}t \tag{3}$$

I valori dei parametri *a* e *b* s'ottengono per derivazione:

$$\frac{\partial}{\partial a} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} [f(t) - a - bt]^2 \mathrm{d}t = -2 \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} [f(t) - a - bt] \mathrm{d}t = -2 \left[\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} f(t) \mathrm{d}t - aL \right] = 0 \tag{4}$$

$$\frac{\partial}{\partial b} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} [f(t) - a - bt]^2 \mathrm{d}t = -2 \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} t[f(t) - a - bt] \mathrm{d}t = -2 \left[\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} tf(t) \mathrm{d}t - b\frac{L^3}{12} \right] = 0$$

da cui

$$a = \frac{1}{L} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} f(t) \mathrm{d}t = \overline{f} \tag{5}$$

$$b = \frac{12}{L^3} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} tf(t) \mathrm{d}t$$

Quando il profilo è conosciuto per punti discreti anziché in modo continuo, la (3) e la (5) diventano

$$\min_{a,b} \sum_k \Delta S_{\mathrm{l}k}^2 = \min_{a,b} \sum_k [f_k - a - bt_k]^2 \tag{6}$$

$$a = \frac{1}{N} \sum_k f_k = \overline{f}$$

$$b = \frac{\sum_k t_k f_k}{\sum_k t_k^2}$$

La retta ai minimi quadrati, essendo basata su medie integrali o algebriche, è robusta al rumore, e può essere utilizzata proficuamente anche in presenza di dati dispersi.

Tutti i profili reali sono limitati, eventualmente con discontinuità finite. Osservando le (5) e le (6), calcolabili per ogni funzione *f*(*t*) limitata, si evince che la retta LS è calcolabile per qualsiasi profilo reale. Inoltre, il valore ottenuto è unico. In definitiva, la retta LS esiste ed è unica per qualsiasi profilo reale.

2.1.2 *La retta a zona minima (*MZ*)*

La retta MZ è la retta di simmetria della coppia di rette parallele di distanza minima che contengono completamente il profilo. Per definizione, la deviazione picco-valle di rettilineità STRt così ottenuta è minima fra quelle ottenute con tutte le possibili rette di riferimento.

Le rette della coppia sono tangenti al profilo: altrimenti, se lo intersecassero allora una parte risulterebbe esterna in violazione della definizione, mentre se non lo toccassero affatto allora esisterebbe una rototraslazione infinitesima che avvicinerebbe le due rette pur mantenendo interno tutto il profilo, e la loro distanza non sarebbe minima.

I gradi di libertà di una coppia di rette parallele sono tre: collocazione, orientamento e distanza mutua. Altrettanti saranno i *punti di contatto*, o di tangenza, del profilo con la coppia: infatti, per ognuno di questi è possibile scrivere un'equazione d'appartenenza alla coppia di rette, cioè di vincolo, e il numero di vincoli dev'essere pari a quello di gradi di libertà. Poiché i tre punti non possono giacere tutti su una sola retta[2], saranno due su una e uno sull'altra. In definitiva, una delle due rette della coppia tange il profilo in due punti, mentre l'altra in uno[3]. Soltanto tre punti del profilo determinano completamente la retta MZ, mentre tutti gli altri potrebbero variare senza conseguenze (sempreché si mantengano all'interno della coppia di rette). Ciò rende la retta MZ molto vulnerabile al rumore: qualunque accidente anche ad uno solo dei tre punti d'appoggio si riflette direttamente sulla retta di riferimento e quindi sulle variazioni locali di rettilineità.

Siano (t_1, f_1) e (t_2, f_2) i due punti d'appoggio su una retta della coppia, e (t_3, f_3) il terzo punto sull'altra retta. Poiché le rette sono parallele, esse hanno la stessa pendenza; avranno dunque equazione

$$\begin{matrix} y = a_1 + bt \\ y = a_2 + bt \end{matrix} \quad \text{con} \quad \begin{aligned} b &= \frac{f_2 - f_1}{t_2 - t_1} \\ a_1 &= \frac{t_2 f_1 - t_1 f_2}{t_2 - t_1} \\ a_2 &= f_3 - \frac{f_2 - f_1}{t_2 - t_1} t_3 \end{aligned} \tag{7}$$

L'intercetta della retta di riferimento è la media delle due intercette; in definitiva si ricava

$$\begin{aligned} a &= \frac{(t_2 + t_3) f_1 - (t_1 + t_3) f_2 + (t_2 - t_1) f_3}{2(t_2 - t_1)} \\ b &= \frac{f_2 - f_1}{t_2 - t_1} \end{aligned} \tag{8}$$

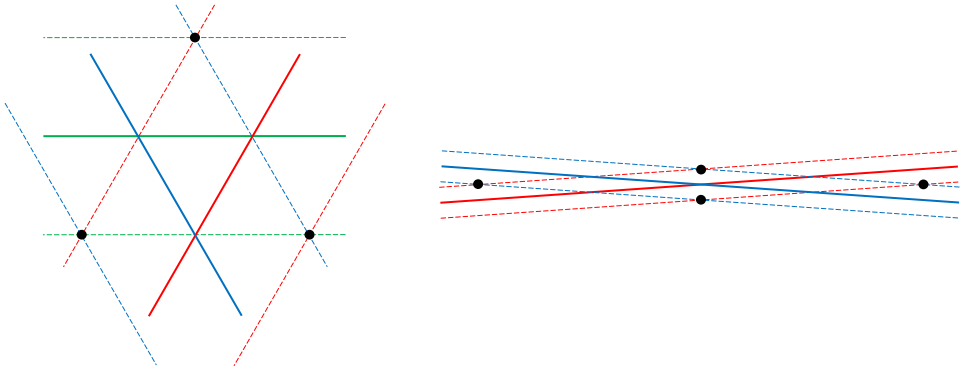
La retta MZ non è necessariamente unica. Si prendano ad esempio tre punti ai vertici di un triangolo equilatero (Figura 2 (a)), più eventuali altri contenuti all'interno del triangolo (non rappresentati in figura): vi sono in questo caso 3 rette MZ, allineate ciascuna lungo uno dei lati. Oppure l'esempio di quattro punti ai vertici di un rombo (Figura 2 (b)), anche qui più eventuali altri contenuti all'interno: vi sono due rette MZ,

[2] Se lo fossero, non risulterebbe vincolato il grado di libertà della distanza fra la coppia di rette. Fa eccezione il caso degenere di un profilo perfettamente rettilineo, quando i punti di contatto sono non tre ma tutti (infiniti), e la distanza fra la coppia di rette è nulla.

[3] Si possono dare altri casi degeneri in cui la coppia di rette parallele si appoggia su più di tre punti (ad esempio, vedi Figura 2 (b)). Tali casi appartengono alla speculazione, perché il rumore di misura impedisce il verificarsi di tale evenienza in modo esatto.

allineate lungo i lati contrapposti del rombo. Quest'ultimo caso (b) è meno artificiale del primo quando il rombo sia sufficientemente schiacciato, cioè la diagonale verticale in figura sia molto più corta di quella orizzontale: in questo caso tutti i punti risultano sufficientemente allineati da costituire un caso verosimile.

Figura 2.
Esempi di non unicità della retta MZ: (a) tre punti ai vertici di un triangolo equilatero; (b) quattro punti ai vertici di un rombo.



(a) (b)

In entrambi gli esempi, piccole deviazioni intorno al caso geometricamente ideale possono portare a soluzioni assai differenti: nell'intorno di una simmetria, la retta MZ è estremamente instabile, in modo addirittura discontinuo.

Questa definizione è quella di default adottata dalla [3] per l'indicazione delle tolleranze geometriche.

2.1.3 La retta passante per due punti predefiniti

Essa rende nulla la deviazione locale di rettilineità in tali punti, ad esempio agli estremi del profilo.

Tali punti siano (t^-, f^-) e (t^+, f^+). I parametri della retta avranno equazione

$$a = \frac{f^- t^+ - f^+ t^-}{t^+ - t^-} \qquad (9)$$
$$b = \frac{f^+ - f^-}{t^+ - t^-}$$

come si verifica immediatamente.

Tale retta esiste ed è unica per ogni profilo reale[4]. Essa è comoda da misurare perché non richiede elaborazione: basta infatti allineare lo strumento (ad esempio un interferometro con accessorio per rettilineità) in modo che nei due punti (ad esempio agli estremi) indichi zero, perché lo scostamento locale di rettilineità sia dato direttamente dalla lettura dello strumento.

[4] Ciò è vero sotto l'ipotesi che in corrispondenza di tali punti il valore del profilo sia unico, cioè che esista un solo punto per t^+ e uno solo per t^-. Ciò è senz'altro vero se i punti sono misurati per scansione. Nel caso che ciò non sia vero, ad esempio perché il profilo è misurato due volte con ciclo simmetrico, all'andata e al ritorno, allora ci si può ricondurre al caso d'unicità mediando le coppie di punti corrispondenti d'andata e di ritorno (così, fra il resto, eliminando anche eventuali effetti di deriva lineare).

2.2 Retta di riferimento ottenuta mediante operatore lineare

Generalizziamo ad una classe di rette di riferimento, ottenute mediante trasformazione integrale del profilo:

$$\begin{aligned} a &= \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} f(t)h(t)\mathrm{d}t \\ b &= \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} f(t)k(t)\mathrm{d}t \end{aligned} \tag{10}$$

dove $h(t)$ e $k(t)$ sono due funzioni nucleo della trasformazione.

Consideriamo inizialmente il caso speciale di un profilo perfettamente rettilineo:

$$f(t) = c + dt \tag{11}$$

La retta di riferimento, secondo le (10), avrà parametri:

$$\begin{aligned} a &= \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} (c+dt)h(t)\mathrm{d}t = c\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} h(t)\mathrm{d}t + d\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} th(t)\mathrm{d}t \\ b &= \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} (c+dt)k(t)\mathrm{d}t = c\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} k(t)\mathrm{d}t + d\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} tk(t)\mathrm{d}t \end{aligned} \tag{12}$$

È desiderabile che in questo caso la retta di riferimento sia coincidente con il profilo rettilineo:

$$\begin{cases} a = c \\ b = d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} h(t)\mathrm{d}t + d\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} th(t)\mathrm{d}t = c \\ c\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} k(t)\mathrm{d}t + d\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} tk(t)\mathrm{d}t = d \end{cases} \tag{13}$$

Affinché la (13) sia soddisfatta per ogni possibile profilo rettilineo, cioè per ogni *c* e *d*, per il principio d'identità dei polinomi (in *c* e *d*) è necessario che

$$\begin{aligned} &\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} h(t)\mathrm{d}t = 1; \quad \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} th(t)\mathrm{d}t = 0 \\ &\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} k(t)\mathrm{d}t = 0; \quad \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} tk(t)\mathrm{d}t = 1 \end{aligned} \tag{14}$$

Le (14) costituiscono vincoli nella scelta delle funzioni nucleo, in modo che sia verificata la proprietà di coincidenza per profili rettilinei. Le (10) diventano dunque

$$\begin{aligned} a &= \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} f(t)h(t)\mathrm{d}t \\ b &= \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} f(t)k(t)\mathrm{d}t \end{aligned} \quad \text{soggette a} \quad \begin{aligned} &\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} h(t)\mathrm{d}t = 1; \quad \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} th(t)\mathrm{d}t = 0 \\ &\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} k(t)\mathrm{d}t = 0; \quad \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} tk(t)\mathrm{d}t = 1 \end{aligned} \tag{15}$$

2.2.1 Applicazione alle rette di riferimento più usate nella pratica

Ricordando anche la proprietà fondamentale della delta di Dirac $\delta(t)$,

$$\int_{\mathcal{I}} w(t)\delta(t-t_0)\mathrm{d}t = w(t_0), \quad \forall t_0 \in \mathcal{I} \tag{16}$$

e in particolare, per $w(t) = 1$,

$$\int_{\mathcal{I}} \delta(t-t_0)\mathrm{d}t = 1, \quad \forall t_0 \in \mathcal{I}, \tag{17}$$

e confrontando le (5), (6) e (9) con la (15), si può verificare che le rette ai minimi quadrati, sia nel continuo sia nel discreto, e la retta passante per due punti, ricadono in questa categoria; le funzioni nucleo valgono

$$\begin{cases} h(t) = \dfrac{1}{L} \\ k(t) = \dfrac{12t}{L^3} \end{cases} \quad \text{Minimi quadrati nel continuo}^5 \tag{18}$$

$$\begin{cases} h(t) = \dfrac{1}{N}\displaystyle\sum_k \delta(t-t_k) \\ k(t) = \dfrac{1}{\sum_k t_k^2}\displaystyle\sum_k t_k\delta(t-t_k) \end{cases} \quad \text{Minimi quadrati nel discreto}$$

$$\begin{cases} h(t) = \dfrac{t^+\delta(t-t^-) - t^-\delta(t-t^+)}{t^+ - t^-} \\ k(t) = \dfrac{\delta(t-t^+) - \delta(t-t^-)}{t^+ - t^-} \end{cases} \quad \text{Passante per due punti}$$

È immediato verificare che gli operatori nelle (18) soddisfano i vincoli (14)[6].

Non ricade invece in questa categoria la retta MZ. Data la somiglianza formale fra le (8) e le (9), si potrebbe concludere sbrigativamente che le funzioni nucleo siano in questo caso

$$\begin{aligned} h(t) &= \frac{(t_2+t_3)\delta(t-t_1) - (t_1+t_3)\delta(t-t_2) + (t_2-t_1)\delta(t-t_3)}{2(t_2-t_1)} \\ k(t) &= \frac{\delta(t-t_2) - \delta(t-t_1)}{t_2-t_1} \end{aligned} \tag{19}$$

Ciò in realtà non è vero, perché le ascisse t_1, t_2, t_3 che compaiono nelle (8) non sono predeterminate (come invece le t^+ e t^- nelle (9)) ma dipendono dal profilo incontrato di volta in volta.

---

[5] A stretto rigore, occorrerebbe aggiungere "per $-L/2 \le t \le L/2$ e nulle altrove", in quanto gli integrali nelle (5) sono limitati. Possiamo rimuovere quest'appesantimento formale assumendo che al di fuori dell'intervallo sia nullo il profilo.

[6] Per i minimi quadrati nel discreto occorre assumere $\sum_k t_k = 0$, cioè che i dati siano baricentrici rispetto all'origine. Ciò è sempre verificato, eventualmente mediante traslazione dei dati nel loro baricentro, senza perdita di generalità. Quest'ipotesi è implicitamente assunta anche nel continuo, dove l'intervallo d'integrazione [-L/2, L/2] è simmetrico (e quindi baricentrico) intorno all'origine.

La mancanza di requisito di linearità della retta MZ la rende più delicata da trattare, ad esempio in operazioni di media fra misure ripetute di profili: quando sia richiesta proprio la retta MZ, è raccomandabile utilizzare altre rette di riferimento più regolari per eventuali elaborazioni intermedie, lasciando solo all'ultimo la determinazione della retta MZ.

2.3 Linearità

Osservando le (10), è facile constatare la linearità dell'operatore che definisce la retta di riferimento:

$$a = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \left[\sum_i \alpha_i f_i(t)\right] h(t)\mathrm{d}t = \sum_i \alpha_i \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} f_i(t)h(t)\mathrm{d}t = \sum_i \alpha_i a_i$$
$$b = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \left[\sum_i \alpha_i f_i(t)\right] k(t)\mathrm{d}t = \sum_i \alpha_i \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} f_i(t)k(t)\mathrm{d}t = \sum_i \alpha_i b_i \qquad (20)$$

Ciò comporta che anche la deviazione locale di rettilineità goda delle proprietà di linearità:

$$\Delta\mathrm{S_l} = f(t) - a - bt = \sum_i \alpha_i f_i(t) - \sum_i \alpha_i a_i - \sum_i \alpha_i b_i\, t = \sum_i \alpha_i [f_i(t) - a_i - b_i t] = \sum_i \Delta\mathrm{S_l}_i \qquad (21)$$

La proprietà di linearità non si estende invece alla deviazione picco-valle STRt, perché il sottostante operatore (max – min) non è lineare. Si prenda il controesempio di due profili identici, uno ribaltato rispetto all'altro, $f_2(t) = -f_1(t)$: la somma dei due è il profilo nullo, il cui valore della deviazione picco-valle STRt è pure nullo e non può essere somma dei due valori $\mathrm{STRt_1}$ e $\mathrm{STRt_2}$, entrambi non negativi per definizione[7]. Più in generale

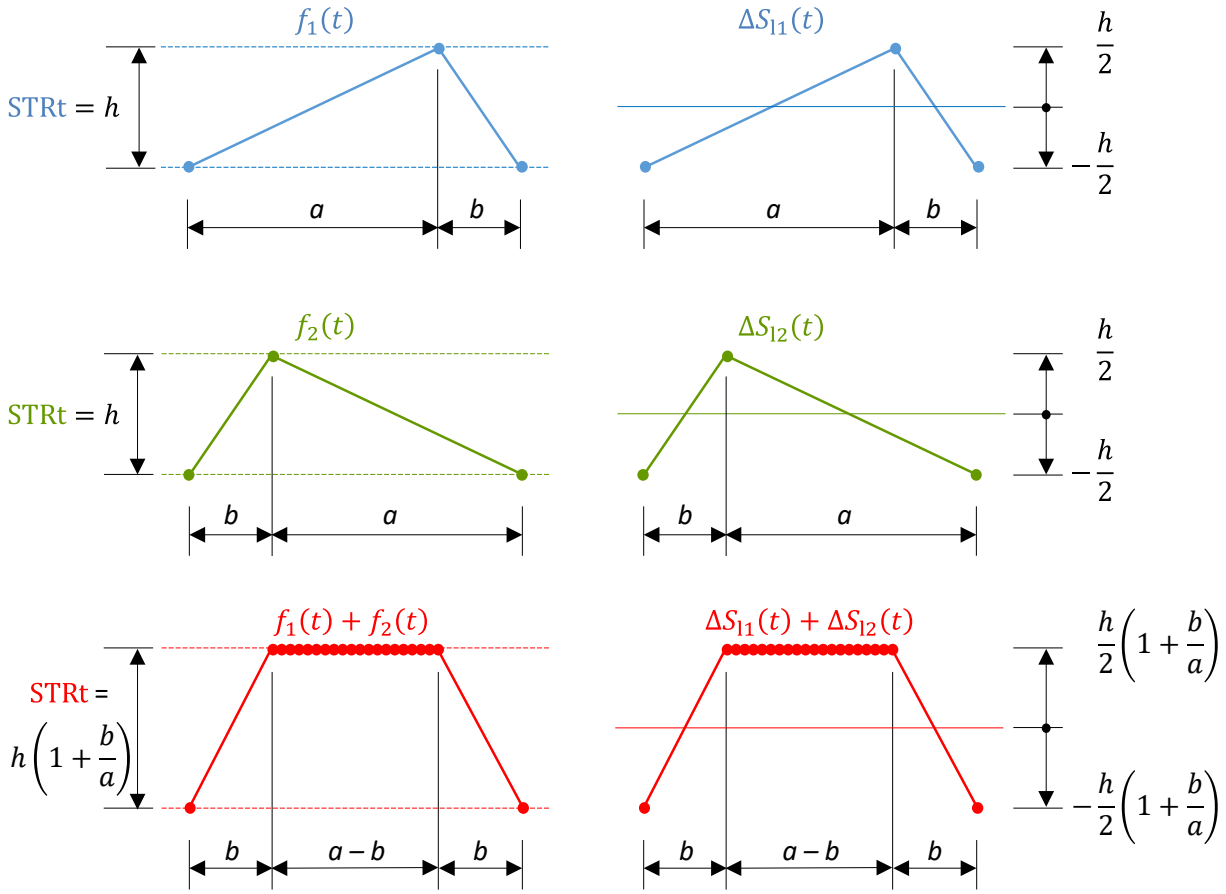
$$f(t) = \sum_i \alpha_i f_i(t) \quad \not\Rightarrow \quad \mathrm{STRt} = \sum_i \alpha_i \mathrm{STRt}_i \qquad (22)$$

S'è già detto che la retta di riferimento MZ non gode di linearità, e che ciò discende dal fatto che i punti d'appoggio potrebbero non essere gli stessi per tutti i profili della combinazione lineare. Nel controesempio in Figura 3, i valori estremi della deviazione di rettilineità $\Delta\mathrm{S_l}$ valgono $\pm\, h/2$ per entrambi i profili, dunque il profilo somma dovrebbe per linearità avere valori estremi pari a $\pm h$, mentre in realtà essi valgono soltanto[8] $\pm(1 + b/a)\, h/2$. In effetti, il punto d'appoggio sulla retta superiore non è lo stesso per i due profili di rettilineità, e addirittura degenera in un intero segmento (avente per estremo proprio quei due punti) nel profilo somma. Per contro, nel caso $a = b$ in cui i punti di contatto superiore dei due profili di rettilineità coincidono, la deviazione locale di rettilineità del profilo somma è pari alla somma di quelle dei singoli profili: ricadiamo nel caso della (19) con punti di contatto t_1, t_2, t_3 costanti.

[7] A meno del caso degenere di tutti profili rettilinei e quindi con valori di STRt tutti nulli, che escludiamo da questo controesempio.

[8] In figura si sottintende $a \geq b$, senza perdita di generalità data la simmetria per ribaltamento dei due profili. Segue che $(1 + b/a) \leq 2$.

Figura 3.
Esempio di non linearità della deviazione locale di rettilineità, ΔS_l, per la retta MZ: somma (in rosso) di due profili di rettilineità s (in blu e verde).



2.4 Invarianza per rototraslazione nel piano di rettilineità

I punti nel piano di rettilineità del profilo $f(t)$ sono esprimibili come

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} f(t) \\ t \end{pmatrix} \quad -\frac{L}{2} \le t \le \frac{L}{2} \tag{23}$$

Quando sottoposti ad una generica rotazione $\boldsymbol{R}_\alpha$ seguita da una generica traslazione $\boldsymbol{u}$, essi diventano

$$\widetilde{\boldsymbol{P}} = \boldsymbol{R}_\alpha \boldsymbol{P} + \boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \mathrm{sen}\alpha \\ -\mathrm{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(t) \\ t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_y \\ u_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(t)\cos\alpha + t\,\mathrm{sen}\alpha + u_y \\ -f(t)\mathrm{sen}\alpha + t\cos\alpha + u_t \end{pmatrix}, \qquad -\frac{L}{2} \le t \le \frac{L}{2} \tag{24}$$

Senza perdita di generalità, vogliamo mantenere la simmetria dell'intervallo intorno all'origine, $\frac{L}{2} \le t \le \frac{L}{2}$, per cui imponiamo che la traslazione sia solo verticale, $u_t = 0$; inoltre, ci limitiamo al caso di piccole rotazioni ($|\alpha| \ll 1$), in cui possiamo confondere $\cos\alpha \approx 1$, $\mathrm{sen}\alpha \approx \alpha$. Trascurando gli ordini superiori, la (24) diventa

$$\widetilde{\boldsymbol{P}} \approx \begin{pmatrix} f(t) + u_y + \alpha t \\ t - \alpha f(t) \end{pmatrix}, \qquad -\frac{L}{2} \le t \le \frac{L}{2} \tag{25}$$

I profili di rettilineità sono normalmente molto schiacciati (prossimi ad una retta), per cui $|f(t)| \ll |t|$, e ancor più $|\alpha f(t)| \ll |t|$. Segue che

$$\widetilde{\boldsymbol{P}} \approx \begin{pmatrix} f(t) + u_y + \alpha t \\ t \end{pmatrix}, \qquad -\frac{L}{2} \le t \le \frac{L}{2} \tag{26}$$

Confrontando la (26) con la (23), è immediato verificare che l'effetto di una piccola rototraslazione è di sommare la retta $u_y + \alpha t$ al profilo di rettilineità. Per definizione (2), la deviazione locale di rettilineità diventa:

$$\widetilde{\Delta S_{\mathrm{l}}} = f(t) + u_y + \alpha t - \tilde{a} - \tilde{b}t \tag{27}$$

Quando la retta di riferimento sia ottenuta mediante operatore lineare (15), per la (21) avremo

$$\widetilde{\Delta S_{\mathrm{l}}} = \Delta S_{\mathrm{l}} + \overline{\Delta S_{\mathrm{l}}} \tag{28}$$

dove

ΔS_{l} è la deviazione locale di rettilineità del profilo $f(t)$ (29)

$\overline{\Delta S_{\mathrm{l}}}$ è la deviazione locale di rettilineità del profilo $u_y - \tilde{a} + (\alpha - \tilde{b})t$

Per i vincoli imposti nella (15), $\overline{\Delta S_{\mathrm{l}}} = 0$ [9], da cui

$$\widetilde{\Delta S_{\mathrm{l}}} = \Delta S_{\mathrm{l}} \tag{30}$$

che dimostra formalmente l'invarianza per rototraslazione nel piano di rettilineità.

Sebbene la retta di riferimento MZ non s'ottenga (in generale) mediante operatore lineare, facilmente si può intuire che l'invarianza (30) sussiste anche in questo caso. Infatti, la deviazione locale di rettilineità è in definitiva una *caratteristica intrinseca*[10] del profilo che non dipende dal suo orientamento, e pertanto è invariante per rototraslazione.

L'invarianza non vale invece per rototraslazioni del piano di rettilineità, quale che sia la scelta della retta di riferimento:

- Le traslazioni del piano di rettilineità portano ad intersezioni in porzioni differenti della superficie. S'avrebbe invarianza solo in un caso estremamente artificiale: quando la superficie sia ottenibile mediante traslazione di una curva, eventualmente accompagnata da (piccola) rotazione intorno alla direzione di traslazione[11], e tale direzione coincida con quella di traslazione del piano di rettilineità.

[9] Ricordiamo che i vincoli sono imposti proprio perché la retta di riferimento coincida con il profilo di rettilineità quando questo è rettilineo; in tal caso, la deviazione locale di rettilineità è nulla.

[10] Le *caratteristiche intrinseche* di un elemento geometrico sono quelle che attengono esclusivamente all'elemento, e non alla sua collocazione ed orientamento nello spazio, ad esempio il diametro di una sfera. Per la definizione di *caratteristica intrinseca* vedi [5] § 3.5.1.

[11] Per l'invarianza a rotazione della deviazione locale di rettilineità in ciascun piano di rettilineità.

- Le rotazioni del piano di rettilineità intorno alla normale alla superficie portano a direzioni d'indagine della rettilineità differenti. S'avrebbe invarianza solo in un altro caso estremamente artificiale: quando la superficie goda di simmetria cilindrica intorno all'asse di rotazione.
- Il profilo di rettilineità è invece invariante al prim'ordine per rotazioni del piano di rettilineità intorno alla direzione parallela alla superficie (vedi Nota 1 nell'Introduzione).

3 Conclusioni

La rettilineità è una caratteristica geometrica di grande interesse pratico che esprime il grado di curvatura di una superficie nominalmente piana in una direzione predeterminata. Essa è il corrispondente bidimensionale della planarità di una superficie, nel *piano di rettilineità*; per questo, possiede un orientamento, quella del piano.

La *deviazione locale di rettilineità*, o la sua caratterizzazione sintetica mediante parametri discreti quali la *deviazione picco valle*, dipendono dalla *retta di riferimento* nel piano di rettilineità. Questa è arbitraria, e dev'essere chiaramente individuata per non dar adito a confusioni e fraintendimenti. Fra le infinite possibili, le più usate nella pratica sono state esaminate in questo Rapporto Tecnico, con riguardo alle loro caratteristiche matematiche. Risulta che la maggior parte sia esprimibile mediante un unico operatore integrale lineare, differendo fra loro solo per la scelta della sua funzione nucleo. La linearità dell'operatore si estende alla deviazione locale di rettilineità, ma non alla deviazione picco valle.

Fa eccezione la retta di riferimento a zona minima MZ, che in generale non è lineare; lo diventa quando per combinazione i tre punti d'appoggio della coppia di rette siano i medesimi per tutti i profili coinvolti. Ciò può accadere quando essi risaltino in modo marcato, ad esempio per singolarità locali della superficie (una piega), o agli estremi.

In ogni caso lineare e non, la deviazione locale di rettilineità, e di conseguenza i suoi parametri descrittivi, sono invarianti per rototraslazione nel piano di rettilineità: essa è in definitiva una caratteristica intrinseca della superficie (in quel piano di rettilineità).

Componendo le caratteristiche appena descritte, si possono trarre alcune conclusioni operative utili nella rilevazione (misurazione) del profilo di rettilineità e nel calcolo della deviazione picco valle.

- L'allineamento dello strumento con la superficie è importante soltanto per l'individuazione del piano di rettilineità: la posizione e l'orientamento intorno alla normale alla superficie sono convenzionali e di solito indicati mediante appositi segni o altri riferimenti geometrici; l'orientamento intorno alla direzione di scansione non è critico, perché piccoli disallineamenti portano a trascurabili errori del second'ordine.
- L'allineamento all'interno del piano di rettilineità è invece irrilevante, perché le deviazioni locali di rettilineità sono invarianti a rototraslazioni in tale piano.
- Quando le misure di profili siano ripetute per desiderabile ridondanza:
    - È indifferente l'ordine di calcolo fra deviazione locale di rettilineità e media, sempreché la retta di riferimento sia ottenibile mediante operatore lineare (ad esempio ai minimi quadrati o passante per due punti predefiniti): la deviazione locale di rettilineità del profilo medio è uguale alla media delle deviazioni locali di rettilineità. È forse preferibile la prima perché di minor peso computazionale.
    - Non è invece indifferente l'ordine di calcolo fra deviazione picco valle e media: in generale la deviazione picco valle del profilo medio è diversa dalla media delle deviazioni picco valle. Sembra preferibile la prima per rimandare la non linearità dell'operatore (max – min) il più tardi possibile lungo la catena di calcolo.
    - Quando la retta di riferimento sia quella a zona minima, la sua non linearità rende l'ordine di calcolo non indifferente. A causa dell'instabilità e possibile non unicità della terna di punti d'appoggio, si raccomanda d'effettuare prima la media dei profili, e poi calcolare la deviazione locale di rettilineità, così che i dati d'ingresso siano i più stabili possibili.

- Prima dell'operazione di media, non è necessario pre-allineare ("ruotare") ciascun profilo nel suo piano di rettilineità, perché una (piccola) rototraslazione introduce in ciascun profilo solo un termine lineare, che si propaga per linearità della media fino al termine della catena di calcolo, dove finalmente viene automaticamente eliminato.

4 Riferimenti

[1] UNI EN ISO 12780-1:2011 Specifiche geometriche dei prodotti (GPS) – Rettilineità – Parte 1: Vocabolario e parametri di rettilineità.

[2] UNI EN ISO 12780-2:2011 Specifiche geometriche dei prodotti (GPS) – Rettilineità – Parte 1: Operatori di specifica.

[3] UNI EN ISO 1101:2013 Specifiche geometriche dei prodotti (GPS) – Indicazione delle tolleranze geometriche – Tolleranze di forma, orientamento, localizzazione e oscillazione

[4] UNI EN ISO 17450-1:2012 Specifiche geometriche dei prodotti (GPS) – Concetti generali – Parte 1: Modello per la specifica e la verifica geometrica